

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间: 2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

线性代数笔记12——列空间和零空间

零空间

先看定义。A是m×n矩阵，x是列向量，如果存在向量集合N，满足：

$$N = \{x \in R^n | Ax = 0\}$$

则称N是A的零空间。

零空间的意义

从定义看出，零空间是方程Ax = 0的所有解的集合：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A的零空间关心的是方程Ax = 0的解，准确地说是解所张成的空间，方程等于零向量也是零空间中“零”的含义。因为x∈Rⁿ，零空间关心的又是x的解，所以x张成的空间也在Rⁿ中，那么它是否是Rⁿ的子空间呢？

首先，0向量是方程的一组解。再假设v₁,v₂也都是方程的解，现在来看加法封闭性：

$$v_1, v_2 \in N$$

$$Ax = 0 \Rightarrow Av_1 = 0, Av_2 = 0 \Rightarrow A(v_1 + v_2) = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in x$$

v₁,v₂满足加法封闭性。最后验证数乘封闭性，C是任意常数：

$$v_i \in N, \quad CAv_i = 0 \Rightarrow A(Cv_i) = 0 \Rightarrow Cv_i \in N$$

v也满足数乘封闭性，所以零空间也是Rⁿ的子空间。既然零空间是子空间，子空间又必须包括零向量，当Ax = b，b≠0时，由于没有全零解，A一定没有零空间。

找出零空间

我们已经知道了零空间的意义，如何找出零空间呢？

先看一个例子：

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

示例比较简单，除了全零解之外，方程组还有多组解，具体来说，如果C是任意常量，则：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ C \\ -C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$N(A) = span\left(\begin{bmatrix} C \\ C \\ -C \end{bmatrix}\right)$$

在R³空间中，N(A)是过原点的直线。

再来个稍微复杂点的例子：

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

只需求解方程组就可以了，方法之一是将A化为行最简阶梯矩阵：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

为了解方便，我们的目标是让方程组的未知数尽量少，所以还可以进一步化简，让台角上方全为0：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

将行最简阶梯矩阵转换为方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

两个方程，四个未知数，方程组有无数解，A的零空间是整个R⁴还是R⁴的其它子空间呢？回答这个问题前，还需要对方程组进一步转化：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 + 2x_4 \\ -2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 = ax_3 + bx_4$$

x₃, x₄可以是任意实数，a, b是线性无关的，所以A的零空间就是a和b张成的空间：

$$N(A) = span(a, b) = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

具体来说，A的零空间是R⁴空间内过原点的一个平面，当然也是R⁴的子空间。

零空间与线性无关

再来关注一下Ax = 0中A的性质，A_{m×n}由n个列向量组成：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

\$v = \{2gh\}^{1/2}\$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$Ax = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n = \mathbf{0}$$

如果A是线性无关的，意味着方程组只有一个全零解，或者说，这个方程的解集是A的零空间，并且这个零空间只包含零向量。此时，A应当可以化简成单位矩阵：

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

结论是，当A是满秩方阵或列满秩的长方矩阵时，A的零空间只有零向量（仅仅是行满秩时就不一定了）。

列空间

如果A是m×n矩阵，那么A的列空间是A中所有列向量张成的空间。A的列空间用C(A)表示：

$$A_{m \times n} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n], \quad C(A) = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

C(A)显然是R^m的子空间。

列空间的意义

先召唤一个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

三个向量不能构成整个R⁴空间，它只能构成R⁴的子空间。那么列空间的意义何在呢？还是要结合方程来看，零空间关心的是Ax = 0的解；列空间关心的是，在Ax = b中，什么样的b才能让方程有解。对于任意的b，方程并不总是有解，比如下面这个：

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

四个方程，三个未知数，方程组可能无解。从向量空间上看，三个向量无法充满整个四维空间，所以肯定有很多b不是这三个向量的线性组合。同时，这个方程组也可能是有解的，什么样的b才能使方程组有解呢？一个简单的办法是先写出x，然后根据b = Ax反推出b：

$$b = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

可以看到， b 是 A 的线性组合，所以 b 一定在 A 的列空间内，此时 $Ax = b$ 有解；反之，如果 b 不在 A 的列空间中，意味着 $Ax = b$ 无解，这就是列空间意义了。

在上面例子中， A 的第三个列向量可以由前两个的线性组合表示，因此 A 的列空间是 R^4 的二维子空间：

$$N(A) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$$

列空间的基

我们已经理解了列空间，怎样计算列空间的基呢？先来看个例子：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A 的列空间可以直接写成：

$$C(A) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

这样写似乎没错，但是 A 的四个列向量是否是线性组合呢？肯定不是，因为 $C(A)$ 至多能张成 R^3 空间，只需要三个向量就够了，所以 A 的四个向量中至少有一个是多余的，这就需要去掉多余的向量，求得列空间的基，这需要运用零空间的知识进行一些计算。首先将 A 转换为行最简阶梯矩阵，在此基础上让台角上方全为0：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A 最终化简为行最简阶梯矩阵，阶梯的台角代表主元：

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 3x_3 & 2x_4 \\ 0 & x_2 & -2x_3 & -x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这样看来主元的个数等于矩阵的秩。在 R 中，1、2两列是主元所在的列，它们是线性孤立的，其它列都可以用它们的线性组合表示，这也意味着1、2列的前身—— A 的1、2两列是线性孤立的。因此，只要确定了主元，就可以将列空间的基用主元所在的列数表示，本例中：

$$C(A) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$$

示例

示例1

看看哪些是 R^3 的子空间?

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in R^3$$

$$1. a_1 + a_2 - a_3 = 0$$

$$2. a_1 a_2 - a_3 = 0$$

$$3. \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

首先回顾一下子空间，子空间包括零向量，子空间内所有向量的线性组合依然在子空间内。

1.这里描绘了向量分量间的关系是线性的，可以将其转换为方程：

$$Ax = [1 \quad 1 \quad -1] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ 是 $\langle 1, 1, -1 \rangle$ 的零空间，零空间是 R^3 的子空间。

2.三个分量不是线性关系了，这意味着八成不是子空间，可以随意列举几个向量。当 $a_1=1, a_2=1$ 时， $a_3 = a_1 a_2 = 1$ ， $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle$ ，由于子空间对数乘封闭，所以 $\langle 2, 2, 2 \rangle$ 也应该在子空间内，但此时 $a_3 \neq a_1 a_2$ ，所以问题2的条件不能构成子空间。

3.先将表达式化简：

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(C_1 + \frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(C_2 + \frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ 是 $\langle 1, 0, -1 \rangle$ 和 $\langle 1, 0, 1 \rangle$ 的线性组合，是子空间。

4. 还是先将表达式化简：

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 \\ 1 \\ -C_1 + C_2 \end{bmatrix}$$

注意到第二个分量是1，是定值，无法构成零向量，问题4的条件不能构成子空间。

示例2

找出 $Ax=b$ 的列空间。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -3 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

首先化简为最简行阶梯矩阵：

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主元是1、2、4列，列空间是主元所在的列：

$$C(A) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: 线性代数

标签: 零空间, 列空间, 列空间的基

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

4

推荐

0

反对

« 上一篇: 线性代数笔记11——向量空间

» 下一篇: 寻找“最好”(6)——心的距离

posted on 2018-09-05 11:38 我是8位的 阅读(28772) 评论(7) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yozodcs.com

永中DCS_文档在线
预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等，特定格式的合作，支持Windows、信创环境下一键部署

打开 >

编辑推荐：

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间：2022年3月8日-3月18日

最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园
Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes